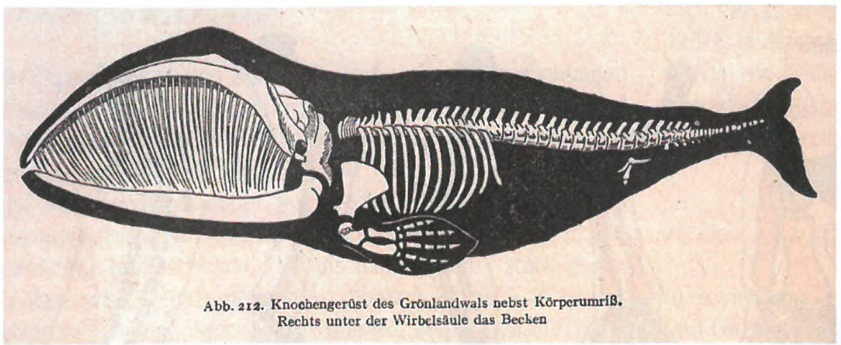

Abb. 6. Knochengerüst des Grönlandwals (LÖBEL & MASCHKE 1948, S. 194)

vor (s. Tab. 1). Innerhalb biologiehistorischer Darstellungen zu DARWINS Hauptwerk ›On the Origin of Species‹ (1859) stand von den fünf Darwin'schen Theorien (MAYR 2002, S. 405 f.) die Selektionstheorie im Vordergrund. In den 1950er Jahren fand zudem in den Lehr- und Lernmaterialien für die Klasse 8 eine kritische Auseinandersetzung mit dem Begriff ›Kampf ums Dasein‹ statt (u. a. MfV 1955). Diese lehnte sich inhaltlich an den *»russischen Nationalstil in der Reaktion auf Darwin«* (TODES, 2009, S. 221) an.

1960er Jahren war der Schöpferische Darwinismus in den Materialien ein fester Bestandteil. Erst infolge seiner (politischen) Überwindung wurden vermehrt Erkenntnisse aus dem Bereich der Genetik aufgenommen. Die Schulbücher von 1965 für die Klassen 10 und 12 enthielten erstmals ein Kapitel zur Genetik (Grundlagen der Vererbungslehre). Ab 1965 entfiel der Schöpferische Darwinismus und die Autoren nahmen Erkenntnisse des Neodarwinismus sowie des Synthetischen Darwinismus in die Lehrpläne und Lehrbücher auf. Die Verfasser der Lehrbücher für die Klasse 10 von 1960 und für die Klasse 12 von 1965 integrierten nun Kapitel über die Evolutionsfaktoren. Auch folgte die Anordnung der Stoffgebiete im Lehrplan und später im Lehrbuch nicht länger einer historischen Entwicklung der Wissenschaften, sondern ab 1967 einer Wissenschaftslogik. Grundlagen im Bereich der Genetik sollten ein Verständnis evolutiver Prozesse erleichtern.

Seit dem ersten Lehrbuch von 1946 wurde stets der Darwinismus, wenn auch im Umfang, der Tiefe und Anordnung der inhaltlichen Auseinandersetzung variierend, behandelt. DARWINS Leben vor seiner Reise mit der Beagle, Reisebeschreibungen, sein Leben nach der Forschungsreise und theoretische Aspekte seiner Arbeiten kamen als Subkategorien in allen Lehrbüchern

6 Fazit

Der Fachdisziplin Evolutionsbiologie kam auf dem Gebiet der SBZ/DDR eine entscheidende Rolle beim Aufbau eines wissenschaftlichen Weltbildes zu. Ihr zentraler Stellenwert zeigte sich u. a. an der Einbindung von Fachwissenschaftlern bei der Erstellung der Unterrichtsmedien sowie ihrer Position als dominanter Unterrichtsstoff in Klasse 10. Im Bemühen um eine Vereinbarkeit mit dem dialektischen Materialismus unterlag diese Fachdisziplin dabei tiefgreifenden ideologischen Modifikationen (z. B. Nachkriegszeit und Diskurs Schöpferischer Darwinismus), die zumeist nach einschneidenden politischen Veränderungen auftraten. Für die Schullehrbücher war jedoch neben einer didaktischen Reduktion der Fachinhalte auch eine Reduktion ideologischer Aussagen typisch. Insbesondere die Aufnahme von Evolutionstheorien spiegelte in den Lehr- und Lernmaterialien verzögert politisch-gesellschaftliche und wissenschaftliche Entwicklungen, Diskurse sowie Paradigmenwechsel wider. Die Orientierung auf den Schöpferischen Darwinismus hatte zur Folge, dass Elemente der Synthetischen Theorie, die in den 1930er und 1940er Jahren entwickelt wurden (REIF et al., 2000), erst über 20 Jahre später Eingang in die Schulmaterialien fanden. Letztlich zeigte sich in den Unterrichtsmedien aber auch die

Aufl.	Vor der Reise	Reisebeschreibung	Nach der Reise	Theoretische Aspekte
1946	Herkunft	Südamerika	Auswertung	Überproduktion, Variabilität, natürliche Selektion
1951/53	Herkunft, Medizin- und Theologiestudium, Vorlieben	Grund der Reise, Madeira, Kerguelen-Inseln	Auswertung, Taubenzucht	Variabilität bei erblichen Eigenschaften, Auslese (natürliche, künstliche), Kampf ums Dasein
1957	Herkunft, Schulbildung, Vorlieben, Medizinstudium, erste Entdeckungen, Theologiestudium	Grund der Reise, Vermittlung, Dauer, Anschauungen Lyells, Exkursionen in Südamerika, Grundfinken auf Galapagos, Korallenriffe, Ankunft	Reisetagebuch, Landsitz in Down, Entwurf des Artenbuches, DARWINS Arbeitsweise, Pflanzensamen, Taubenzucht, Wallace, Vorlage des Manuskripts, Auflage des Artenbuches	Variabilität, Überproduktion, natürliche Zuchtwahl, Kampf ums Dasein, Gesetze der Abänderung, Beweise

Tab. 1. Zusammenfassung zum Thema DARWINS Leben und Werk, Lehrbücher Klasse 8

Evolution der Evolutionstheorien selbst. Dass die Autoren darüber hinaus paläontologische und neontologische Belege, Aspekte der Hominisation, Biogenese sowie natürlichen Systematik in den Lehr- und Lernmaterialien publizierten, veranschaulichte den interdisziplinären Charakter der Evolutionsbiologie. Kontinuitäten in den Unterrichtsmedien, so per exemplum Darstellungen aus CHARLES DARWINS Leben und Werk, standen neben Diskontinuitäten, die sich aus fachwissenschaftlichen und -didaktischen, soziokulturellen sowie technischen Veränderungen ergaben. Naturwissenschaftler wie ERNST HAECKEL, GEORG USCHMANN und HERBERT BACH lassen hier eine Traditionslinie der Universität Jena an den Inhalten des Biologieunterrichtes erkennen. Wie von BERCK & GRAF (2010, S. 267–279) dargestellt, verdeutlicht auch die Geschichte des Biologieunterrichtes am Beispiel der Evolutionsbiologie auf dem Gebiet der SBZ/DDR von 1945 bis 1989, dass es *den* Biologieunterricht nicht gab. In der Gesamtschau unterlag er vielmehr äußeren Einflüssen und trat in vielfältigen, sich teilweise wiederholenden Erscheinungsformen auf.

Die Literatur finden Sie in der Online-Ergänzung.

mit online www.mnu.de ergänzung

Dr. KARL PORGES & Prof. Dr. UWE HOẞFELD, Arbeitsgruppe Biologiedidaktik, Biologisch-Pharmazeutische Fakultät, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Am Steiger 3, Bienenhaus, 07743 Jena

Informationssuche im Mathematikunterricht der Grundschule

Zahlenspiele und Fabelwesen als mögliches Lern-Lehrarrangement

HEIKE M. KNAUBER – HANNES H. SCHRAY – BJÖRN MEDER – LAURA F. MARTIGNON – JONATHAN D. NELSON

Gute Fragen zu stellen, ist eine grundlegende Kompetenz für das Lösen alltäglicher Aufgaben. Der vorliegende Beitrag skizziert eine spielerische Möglichkeit, anhand von gut überlegten Fragen zu verschiedenen Merkmalen und Fabelwesen erste Kenntnisse über Information, sowie einfache Strategien (Heuristiken) der Informationssuche Schüler/inne/n zu vermitteln. Dabei geht es auch darum, elementare Kompetenzen im Umgang mit Kodierung und Dekodierung von Information von Kindern zu fördern.

1 Einleitung

In der gegenwärtigen Gesellschaft steht Kindern und Jugendlichen eine Fülle an verschiedenen Geräten zur Verfügung, die Informationen speichern und verarbeiten. Diese Informationen können, um von den Lernenden adäquat im Alltag eingesetzt werden zu können, nach bestimmten Kriterien gefiltert bzw. kodiert werden. Entsprechende Lernziele sind in den Bildungsplänen der jeweiligen Bundesländer meist im Informatikunterricht curricular fest verankert (Datenbank KMK, 2016). So erachtet der Bildungsplan Baden-Württemberg für Gymnasien Information neben Energie und Materie als zentrale Erscheinungsform der realen Welt und nennt unter der Leitidee *Information und Daten* das Kodieren sowie die Informationseinheiten Bit und Byte als geeignete Lerngegenstände, um die Bedeutung und den Umgang mit der Digitalisierung zu vermitteln (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport, 2004b, 439).

Um der Schnelllebigkeit unserer heutigen technisierten Welt Rechnung zu tragen, scheint es allerdings durchaus sinnvoll, erste Intuitionen und Elementarkompetenzen im Umgang mit Information sowie einfache Strategien, sogenannte Heuristiken, (GIGERENZER, TODD & the ABC group, 1999) der Informationssuche bereits im Mathematikunterricht der Primarstufe zu fördern. Jüngere Schüler/innen können sich dadurch Grundkonzepten der Informationstheorie spielerisch annähern, während die im Bildungsplan für Grundschule Baden-Württemberg vorgebrachten Kompetenzen *»Strategien für eigene Lösungswege nutzen«*, *»Eigene Lösungswege vorstellen und erklären«* sowie *»Ein selbsterfundenes Mathematikspiel präsentieren«*, ebenfalls angesprochen und vermittelt werden (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport, 2004a, 54 ff).

Die im Folgenden vorgestellten Unterrichtsmaterialien und -einheiten sind im Rahmen einer Interventionsstudie im Projekt »Information search« entstanden und getestet worden. Das Projekt *Information Search* ist Teil des DFG-Schwerpunktprogramms SPP 1516 »New Frameworks of Rationality« und wurde unterstützt durch Projektmittel NE 1713/1-2 (JDN) MA 1544/12-2 (LM), und ME 3717/2-2 (BM).

2 Zur Motivation der Studie: historische, mathematische und kognitive Aspekte der Informationstheorie

Unsere heutige Umwelt und Gesellschaft werden durch Informationen bestimmt, welche u. a. durch Telefone, Radios, Fernseher, Computer oder Mobiltelefone gespeichert, übertragen und kommuniziert werden. Erste Versuche, die Thematik der Information greifbar zu machen und eine formale Theorie zu entwickeln, gab es bereits Mitte des 20. Jahrhunderts. Claude E. Shannon gilt dabei als Vater der Informationstheorie. In seiner Veröffentlichung »*A Mathematical Theory of Communication*« (Shannon, 1948) legte er grundlegende Ideen seiner Informationstheorie dar. In Anlehnung an die Arbeiten von Nyquist (1924) und Hartley (1928) beschäftigte er sich mit der Frage, wie man Information für eine formale Theorie der Nachrichtenübertragung mathematisch definieren und messbar machen kann. Shannon gelang es, Information, Informationsübertragung, Kodierung von Information und Informationsredundanz mathematisch rigoros zu definieren. Dabei wurde der semantische Aspekt (Inhalt) einer Nachricht, die übertragen werden soll, nicht berücksichtigt, denn die inhaltliche Bedeutung ist aus technischer Sicht irrelevant. Shannon separierte überflüssige Information (bspw. das Rauschen am Telefon) von der eigentlichen Information (dem Signal) (Shannon & Weaver, 1948/1998). Das Kommunikationsmodell für eine typische Informationsübertragung nach Shannon ist Abbildung 1 zu entnehmen.
Der Prozess besteht aus fünf Teilen und kann anhand von einem Telefonat verdeutlicht werden. Eine sprechende Person am Telefon sei die *Informationsquelle*; diese produziert eine Botschaft, die dann an ein Ziel weitergeleitet wird. In diesem Fall wäre die Nachricht der produzierte Ton dieser Person. Diese Nachricht wird dann vom *Sender/Transmitter* kodiert, um ein Signal zu erzeugen, das für die Kanalübertragung geeignet ist. Der *Kanal* ist das Medium für die Übertragung des Signals ausgehend vom Sender (die Person am einen Ende der Telefonleitung) bis zum Empfänger (eine zweite Person am anderen Ende der Telefonleitung).

Die Frage, die sich Shannon stellte, war: Wie kann eine Nachricht am geschicktesten binär kodiert und übertragen werden? Eine damit verwandte Frage ist: Wie steht die Kodierung mit dem Informationsgehalt der Nachricht in Verbindung (Shannon & Weaver, 1948/1998, 33 f)? Eine fundamentale Erkenntnis ist, dass die Kodierung einer Nachricht und ihr Informationsgehalt in sehr enger Verbindung stehen: Die Länge des binären Kodewortes einer Nachricht bei optimaler Kodierungsstrategie (siehe unten: optimale Fragestrategie) entspricht dem Informationsgehalt der Nachricht, der wiederum als Anzahl von Bits verstanden werden kann. Eine endliche Folge von »Ja/Nein« Antworten wird auch als Kodewort bezeichnet. Für Ja kann man »1«, für Nein kann man »0« schreiben.

Der nächste naheliegende Schritt ist, den Informationsgehalt formal zu definieren. Stellen wir uns folgendes Zahlenspiel vor (nähere Erläuterung siehe unten im Praxisteil): Spieler A denkt sich eine Zahl (Integer) zwischen 1 und 8 aus. Spieler B muss nun versuchen, mit so wenig wie möglich Ja/Nein-Fragen die gesuchte Zahl zu finden. Mögliche Fragestrategien könnten mit Fragen wie »*Ist die Zahl größer als 4?*« beginnen. Diese Frage halbiert den Zahlenraum 1 bis 8 in zwei gleich große Teile. Angenommen, diese Frage würde mit »*ja*« beantwortet, dann wüsste Spieler B bereits, dass er alle Zahlen die kleiner oder gleich 4 sind ausschließen kann. Angenommen Spieler B verfolgt diese Halbierungs-Strategie während des kompletten Spielverlaufs, dann wäre die zweite Frage, ob die gesuchte Zahl größer als 6 ist. Wenn die Antwort auf diese Frage nun »*nein*« wäre, weiß Spieler B, dass er alle Zahlen, die größer 6 sind ausschließen kann. Die dritte Frage würde dann lauten »*Ist die Zahl größer als 5?*«. Es ist nun egal, ob die Frage mit »*ja*« oder »*nein*« beantwortet wird, man weiß nach diesem Schritt, welche Zahl die richtige ist. Spieler B braucht somit bei dieser *Halbierungsstrategie* genau drei Ja/Nein-Fragen, um die gesuchte Zahl zu bestimmen. Der Informationsgehalt der Zahl 5 in diesem Beispiel entspricht der Anzahl der Ja/Nein-Fragen die es ermöglichen sie zu bestimmen. Diese Strategie ist optimal, da die Anzahl der Zahlen eine Zweierpotenz ist.

Shannon experimentierte mit ähnlichen Spielen *(Parlour Game – Twenty Questions)*. Es geht dabei um das Bestimmen eines von einem Spieler gewählten Objektes anhand von Ja/Nein-Fragen. Die Anzahl von Ja/Nein-Fragen im Fall einer bestimmbaren optimalen Strategie diente als erster Quantifizierungsbegriff des Informationsgehalts (Shannon & Weaver, 1948/1998).

Shannons nächster Schritt war die Verallgemeinerung der Ja/Nein-Fragen Strategie und des damit verbunden Informationsbegriff auf Elemente von beliebigen Partitionen in Wahrscheinlichkeitsräumen. Nun handelte es sich also um eine Partition eines Wahrscheinlichkeitsraumes, bestehend aus Ereignissen, welche die verschiedenen »Nachrichten« darstellten, anstatt von Zahlen in einem Zahlenraum. Dabei verallgemeinerte Shannon die Anzahl von Ja/Nein-Fragen auf Ereignisse. Aus dem Ausdruck

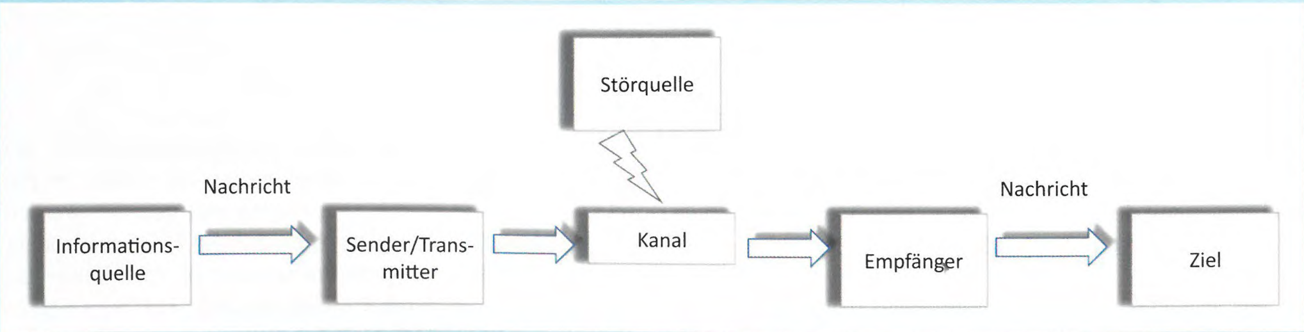

Abb. 1. Kommunikationsmodell nach Shannon in Anlehnung an Martignon (2015)

Schulpraxis Informationssuche im Mathematikunterricht der Grundschule

$$3 = -\log_2 \frac{1}{8},$$

für den Zahlenraum 1 bis 8, ist

$$I(A) = -\log_2 P(A)$$

für Shannon der Informationsgehalt des Ereignisses A in einer Partition des Wahrscheinlichkeitsraumes auf dem P definiert ist (Shannon & Weaver, 1948/1998), wobei A ein Ereignis einer Partition eines Wahrscheinlichkeitsraumes ist.

Es besteht auch ein enger Zusammenhang zwischen den informationstheoretischen Konzepten von Shannon und dem Informationsgehalt einer Frage, deren Antwort noch unbekannt ist. Shannon führte das Konzept der Entropie ein, welches die probabilistische Unsicherheit in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung quantifiziert. Die Entropie $H(X)$ einer Zufallsvariable X ist definiert als

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 \frac{1}{P(x_i)} = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 P(x_i).$$

Die Shannon-Entropie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Ereignissen einer Partition ist maximal, wenn alle Ereignisse gleichwahrscheinlich sind, d. h. man in einem Zustand maximaler Unsicherheit ist. Wenn zum Beispiel im Zahlenspiel alle Zahlen zwischen 1 und 8 gleichwahrscheinlich sind, ist die Entropie 3 Bits.

Den Nutzen von Fragen kann man nun mittels der erwarteten Reduktion von Entropie quantifizieren, d. h. umso höher die erwartete Unsicherheitsreduktion, umso größer der Informationsgewinn einer Frage (*information gain*; Lindley, 1956; siehe Nelson, 2005, für eine Übersicht verschiedener Ansätze). Zudem gibt es einen engen Zusammenhang zwischen der Halbierungsheuristik (siehe Kap. 3) und Entropiereduktion (Nelson et al., 2014), da die Heuristik unter bestimmten Bedingungen auch die informativste Frage identifiziert.

Die Kernfrage unseres Projektes ist, ob erste Intuitionen zum Informationsgehalt und zur Kodierung von Information bereits bei Kindern der vierten und fünften Klasse gefördert werden können. Wir lehnen uns dabei an psychologische Studien aus der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts an.
Bereits in den 1960er Jahren wurden psychologische Studien durchgeführt, die die Strategien von Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen bei dem *Twenty Questions Game* untersuchten (Denney & Denney, 1973; Eimas, 1970; Mosher & Hornsby, 1966). Dabei konnte gezeigt werden, dass Kinder eher nach einzelnen Objekten fragen (sogenannte *hypothesis-testing questions*; Nelson et al., 2014; bspw. »*Ist es Paul?*«), während Jugendliche und Erwachsene versuchen, breitere Hypothesen zu formulieren, um danach ihre Frage zu richten (bspw. »*Ist die Person männlich?*« oder »*Ist die Zahl größer als 4?*«).

Im Folgenden werden eine Abwandlung des bekannten »Wer ist es?«-Gesellschaftsspiels, das Zahlenspiel 1 bis 8, sowie Kodier-/Dekodierungsaufgaben als Möglichkeit zur Förderung bei sogenannten »Halbierungs-Heuristiken« der Informationssuche im Mathematikunterricht der Primarstufe und der ersten Klasse der Sekundarstufe näher erläutert. Anschließend dient ein Fabelwesenspiel als Transferaufgabe der vorherigen Spiele.

Der Umgang mit der spielerischen Lernumgebung bietet die Möglichkeit, bei Kindern erste Intuitionen zu Information, Informationssuche und Informationskodierung zu fördern. Parallel dazu dient die Auseinandersetzung mit dieser Thematik dazu, das Themengebiet der Stochastik für die Sekundarstufe vorzubereiten. Diese ersten Schritte können dann im Sinne eines Spiralcurriculums in der Sekundarstufe wieder aufgenommen werden, wenn eine stochastische Grundlage bei den Schüler/inne/n vorhanden ist (Martignon, Nelson, Meder, Knauber & Schray, 2015).

3 Möglichkeiten zur Förderung von Heuristiken der Informationssuche im Mathematikunterricht der Primarstufe

3.1 »Wer ist es?«-Spiel

3.1.1 Beschreibung des »Wer ist es?«-Spiels

Das originale »Wer ist es?«-Spiel der Firma Hasbro besteht aus zwei Spielbrettern mit vierundzwanzig Spielkärtchen zum Aufklappen. Auf den Kärtchen sind weibliche und männliche Personen abgebildet (Abb. 2), die sich durch verschiedene Merkmale unterscheiden (u. a. Hautfarbe, Frisur, Brille). Für den Unterricht wurden lediglich die Abbildungen der Spielkärtchen verwendet. Ziel des »Wer ist es?«-Spiels ist es, mit so wenig wie möglich Ja/Nein-Fragen eine gesuchte Person herauszufinden.

Ablauf: Es werden verschiedene Zweierteams gebildet (Team A und Team B). Team A sowie Team B suchen sich ein Gesicht aus den 24 Spielkärtchen aus und notieren sich die Namen dieser Personen auf einem Blatt Papier. Die ausgesuchte Person muss von den beiden Teams dann im Verlauf des Spieles durch Ja/Nein-Fragen herausgefunden werden. Team B stellt nun eine Frage zu der gesuchten Person. Die Frage muss von Team B so gestellt werden, dass sie von Team A mit »ja« oder »nein« beantwortet werden kann. Anschließend fragt Team A eine Frage zu der gesuchten Person. Gewinner des Spiels ist das Team, welches zuerst die gesuchte Person herausfindet.

3.1.2 Didaktischer Kommentar zum »Wer ist es?«-Spiel

Zu Beginn der Unterrichtsstunde präsentiert die Lehrperson das Spiel der Klasse. Da das Spiel in den letzten Jahren sehr populär geworden ist, ist es möglich, dass vielen der Schüler/innen der Ablauf und die Spielregeln bereits bekannt sind. Dennoch ist es wichtig, dass die Lehrperson die Regeln und alle nötigen

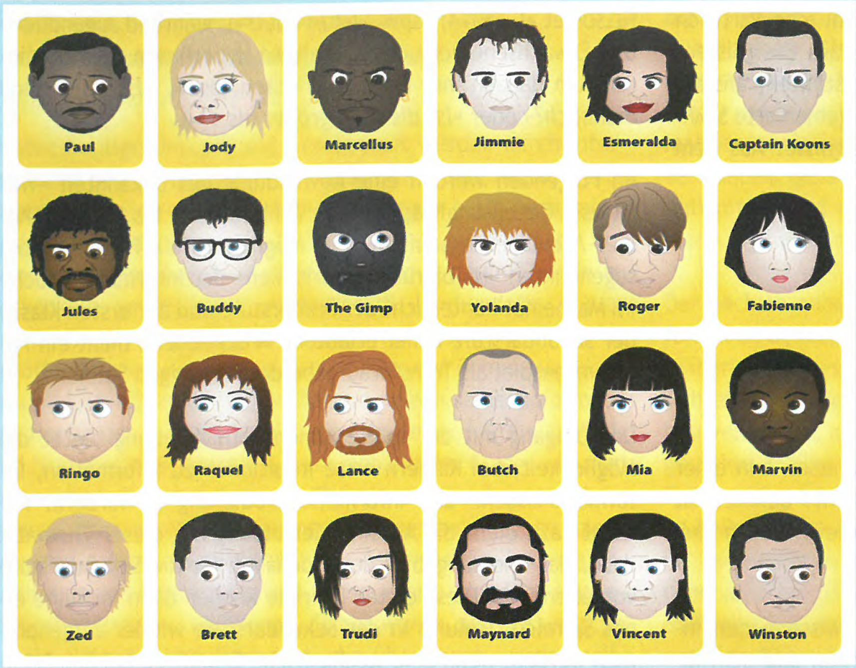

Abb. 2. »Wer ist es?«-Spiel

Hinweise erläutert, um Missverständnisse im Vorhinein auszuschließen. Die Schüler/innen werden in verschiedene Zweierteams aufgeteilt, und jedem Zweierteam wird ein gegnerisches Team zugeordnet. Ist die Anzahl von Schüler/inne/n ungerade, so spielt die Lehrperson mit. Jedes Team erhält ein Arbeitsblatt, auf dem je zwei Abbildungen der Spielbretter zu sehen sind (Abb. 2). Wichtig ist, dass sich die jeweiligen Teampartner in ihren Rollen abwechseln, das heißt pro Runde stellt nur ein Kind eine Frage, damit jedes Kind eine individuelle Fragestrategie verfolgen kann. Das Kind, das nicht rät, notiert die Fragen und Kommentare des/r Partners/in im Heft. Eine Runde endet sobald die gesuchte Person des gegnerischen Teams erraten wurde. Fragen wie *»Hat die Person eine Brille?«* oder *»Ist die Person männlich?«* sind typisch. Nach ein paar Spielrunden werden im Plenum diverse Suchstrategien der Schüler/innen besprochen und analysiert. Es wird auch darüber diskutiert, ob es »geschickte« und »ungeschickte« Fragen gibt, die gestellt werden können bzw. wurden. Zur Ergebnissicherung sollen die Schüler/innen das im Plenum Besprochene in ihren Heften schriftlich festhalten.

Durch das »Wer ist es?«-Spiel lernen Kinder spielerisch, Ja/Nein-Fragen strategisch zu stellen. Eine Frage ist »geschickt«, wenn sie die restliche Menge von Personen in beinahe gleich große Teile zerlegt (wenn nicht gleich, dann so nah wie möglich an einer 50:50 Verteilung). Schüler/innen der Interventionsstudie haben folgende »geschickte« Fragen gestellt: *»Ist die gesuchte Person ein Mann?«* oder *»Hat die gesuchte Person dunkle Haare?«*. »Ungeschickte« Fragen, die gestellt wurden, waren z. B. *»Ist Mia die gesuchte Person?«* oder *»Ist die Person ein Brillenträger?«*, denn in beiden Fällen gibt es genau eine Person mit dieser Eigenschaft. Mit dieser Art von Fragen erhält man in der Regel, vor allem am Anfang des Spiels, kaum Information. *»Hat die Person dunkle Haare«*, kann natürlich im späteren Spielverlauf eine eher ungeschickte Frage sein, *»Ist es Mia?«* kann hingegen eine geschickte Frage sein, wenn nur noch wenige Objekte vorhanden sind und keine bessere 50:50 Verteilung oder eine Verteilung, die möglichst nahe an dem 50:50 Split ist, mehr möglich ist.

3.2 Zahlenspiel 1 bis 8

3.2.1 Beschreibung des Zahlenspiels 1 bis 8

Das Zahlenspiel 1 bis 8 besteht aus acht Spielkarten (Abb. 3), auf denen die Zahlen von 1 bis 8 abgebildet sind. Ziel des Zahlenspieles ist es, mit so wenig wie möglichen Fragen die gesuchte Zahl herauszufinden.

Ablauf: Spieler 1 denkt sich eine Zahl von 1 bis 8 aus, diese Zahl muss Spieler 2 dann im Verlauf des Spieles durch Ja/Nein-Fragen herausfinden. Spieler 1 notiert die Anzahl der Fragen, die Spieler 2 braucht, um die gesuchte Zahl herauszufinden. Anschließend wechseln Spieler 1 und Spieler 2 ihre Rollen.

Abb. 3. Zahlenspiel 1 bis 8

3.2.2 Didaktischer Kommentar zum Zahlenspiel 1 bis 8

Die Lehrperson spielt zu Beginn der Unterrichtsstunde das Zahlenspiel 1 bis 8 je drei Mal an der Tafel gegen die gesamte Klasse mit der Fragestellung: *»Benötigt die Lehrperson oder die Klasse weniger Fragen, um die gesuchte Zahl herauszufinden?«* Aus eigener Erfahrung hat sich gezeigt, dass durch den Wettbewerbscharakter »Lehrer vs. Schüler/innen« der Stundeneinstieg motivierend auf die Lernenden wirkte und zudem deren Neugier weckte. Damit die jeweiligen Zahlen für die gesamte Klasse gut sichtbar sind, werden folierte Spielkärtchen mittels Magneten in vergrößerter Form an die Tafel geheftet. Des Weiteren ist es sinnvoll, nochmals mögliche Verhaltensregeln während des Unterrichts im Plenum zu thematisieren, damit ein eigenständiges Arbeiten der Schüler/innen im Verlauf der Stunde gewährleistet wird: bspw. *»Ich stelle meine Frage erst, nachdem ich mich gemeldet habe und aufgerufen wurde«*, *»Ich höre zu, wenn andere reden.«*

Um geeignete Fragen zu stellen, müssen die Schüler/innen auf ihr schon erworbenes Zahlenwissen zurückgreifen und wiederholen dieses (bspw. *Zahlen vergleichen, strukturieren und zueinander in Beziehung setzen*; Ministerium für Kultus, Jugend

und Sport, 2004, S. 60). Anschließend wird ein Sieger gekürt, und es werden gemeinsam mit den Schüler/inne/n die verschiedenen Strategien im Plenum diskutiert:
»Welche Fragen waren geschickt?«
»Welche Fragen waren ungeschickt?«
»Welche Fragen würde ich stellen, wenn ich das Spiel erneut spielen würde?«

Damit ist gemeint, dass Schüler/innen eine Intuition dafür bekommen, ob die Fragen so gestellt sind, dass die Anzahl der benötigten Fragen möglichst klein ist. Ob sie eine Intuition dafür entwickelt haben, wäre daran zu erkennen, dass sie nicht mehr dazu tendieren, Fragen nach einem speziellen Merkmal zu stellen, wie z. B. *»Ist es die 8?«*. Dabei werden die für die Schüler/innen geschickten und ungeschickten Fragen von der Lehrperson an der Tafel festgehalten und gemeinsam mit den Schüler/inne/n analysiert.

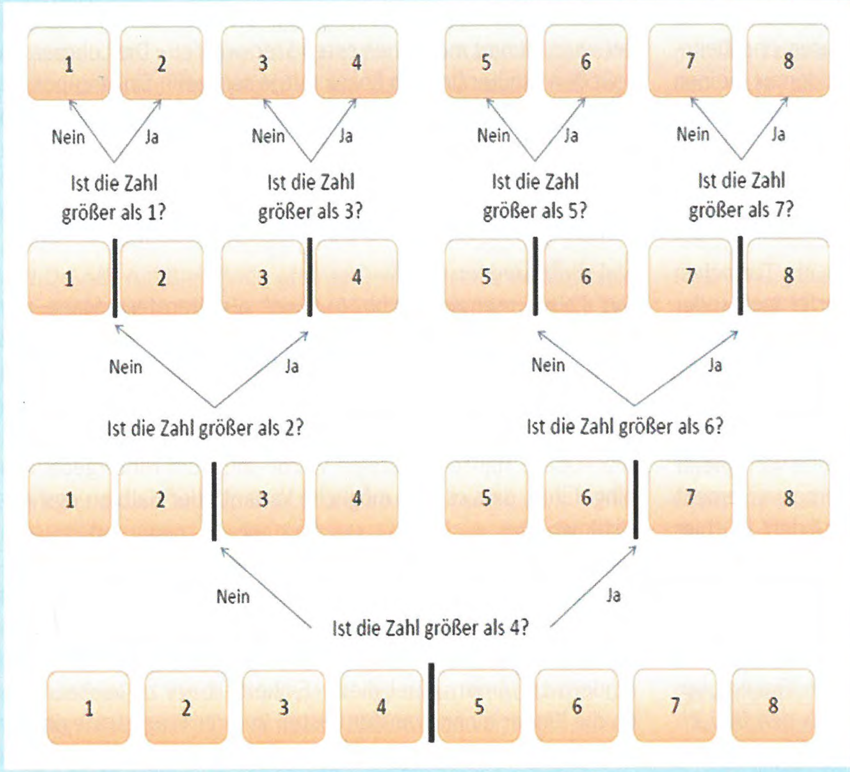

Abb. 4. Fragenbaum zur »Obere Hälfte«-Strategie

Die Lehrperson illustriert nun die Strategie »obere Hälfte« am Overheadprojektor bzw. Beamer (Abb. 4). Durch die Verwendung der »obere Hälfte«-Strategie ist es möglich, jede beliebige Zahl zwischen 1 und 8 mit genau drei Fragen herauszufinden. Zur Veranschaulichung kann das Spiel erneut gespielt werden, und die Lehrperson fährt den passenden »Fragenbaum« (Abb. 4) am Overheadprojektor nach, denn zu einer Strategie gehört auch immer ein Fragenbaum. Den Schülern/innen wurde dieses Darstellungsmittel nicht als Fragenbaum als solcher vorgestellt, sondern sollte als eine anschauliche und für die Schüler/innen nachvollziehbare bildliche Darstellung der »obere Hälfte« Strategie dienen. Auch das Austeilen eines Arbeitsblatts zur »oberen Hälfte«-Strategie ist denkbar. So können die Schüler/innen den »Fragenbaum« selbst mit dem Finger nachfahren. Analog könnte auch die Strategie »untere Hälfte« verfolgt werden, die von den Schüler/inne/n teilweise selbständig thematisiert wird.

Die Schüler/innen spielen das Zahlenspiel 1 bis 8 nun nochmals in Partnerarbeit. Dazu bekommen sie die Zahlenkarten von der Lehrperson ausgeteilt. Als weitere Aufgabe soll von den Schüler/inne/n herausgefunden werden, ob diese Strategie auch bei Verdopplung des Zahlenbereichs (Zahlen 1 bis 16) funktioniert. Für die Ergebnissicherung sollen die Schüler/innen eine Spielanleitung und geschickte Strategien für das gelernte Spiel in ihr Mathematikheft schreiben, um es später auch zu Hause mit Freunden oder den Eltern spielen zu können. Einige Eltern werden wohl eine Analogie zu der deutschsprachigen Spielshow »Der Preis ist heiß« (1989–1997) erkennen, in der es u. a. Aufgabe war, mit so wenig wie möglich Fragen eine Zahl zwischen 1 und 999 zu erraten.

3.3 Türmchenspiel (Kodier- und Dekodieraufgaben)

Ein Ziel von Informationstheorie ist es, Information adäquat zu kodieren. Ist eine Fragestrategie zur Bestimmung eines Objektes einer Grundmenge fixiert, so hat jedes Element der Grundmenge ein eindeutiges Kodewort. Eine bestimmte Fragestrategie entspricht einer Kodierung von Nachrichten, die von der Informationsquelle zum Ziel kommuniziert werden können (Abb. 1). Daher ist es sinnvoll, wenn eine Fragestrategie feststeht, die Kodewörter für ein Item (Zahlen oder Gesichter) in der Grundmenge zu definieren. Betrachten wir die Zahl 3 aus dem Zahlenspiel. Wie wird 3 kodiert anhand von Ja/Nein-Fragen, wenn die »obere Hälfte«-Strategie festgelegt wird? Die erste Frage wird mit »nein« beantwortet, die zweite Frage wird mit »ja« beantwortet und die dritte wieder mit »nein«. In der Schule kann man enaktiv dieses Kodewort nein/ja/nein anhand von bunten Steckwürfeln realisieren: grün für ja, rot für nein (Abb. 5).

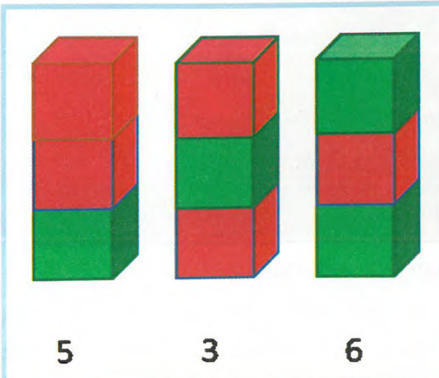

Abb. 5. Kodierte Zahlen aus dem Zahlbereich von 1 bis 8 mit Hilfe der Tinkercubes

3.3.1 Beschreibung des Türmchenspiels

Das Türmchenspiel dient als Zugang zum Kodieren und Dekodieren. Das Spielmaterial besteht aus verschiedenen kleinen roten und grünen Steckwürfeln (Tinkercubes[1]), die ineinander gesteckt werden können.

Ablauf: Spieler 1 nennt eine Zahl von 1 bis 8 (in Bezug auf das vorangegangene Zahlenspiel 1–8), die von Spieler 2 dann in Rückgriff auf die »obere Hälfte«-Strategie als Türmchen gebaut wird, indem die verschiedenen Steckwürfel ineinander gesteckt werden. Für eine Frage, die mit »ja« beantwortet werden kann, wird ein grüner Steckwürfel verwendet. Für eine Frage, die mit »nein« beantwortet werden kann, wird ein roter Steckwürfel verwendet. Die gebauten Türmchen werden im Schulheft der Lernenden festgehalten und am Ende von Spieler 1 auf Richtigkeit überprüft. Mit diesem Lehr-Lernarrangement erfahren Kinder, dass wenn eine Fragestrategie fixiert ist (hier »obere-Hälfte«-Strategie), die entsprechende Kodierung und Dekodierung auch festgelegt werden.

3.3.2 Didaktischer Kommentar zum Türmchenspiel

Die Lehrperson präsentiert die roten und grünen Tinkercubes im Plenum: *»Wir wollen heute versuchen, durch den Bau eines Türmchens unsere Fragestrategie für das Zahlenspiel 1 bis 8 abzubilden.«* Oftmals wirkt in der Grundschule auch der Hinweis auf eine »Türmchen-Geheimschrift« motivierend. Die Schüler/innen sollen sich überlegen, ob es eine Möglichkeit gibt, die Fragestrategie mittels der farbigen Würfel abzubilden, also das Verschlüsseln einer Information (in diesem Fall der gesuchten Zahl), so dass Menschen, die nicht in die Geheimschrift eingeweiht sind, diese nicht entschlüsseln können. Die Lehrperson erklärt den Schüler/inne/n die nötigen Fachbegriffe »Kodieren« und »Dekodieren«. Am Overheadprojektor werden im Anschluss die Kodier-Vorschriften erläutert: *»Für eine Frage, die mit »ja« beantwortet wird, nimmt man einen grünen Steckwürfel. Für eine Frage, die mit »nein« beantwortet wird, nimmt man einen roten Steckwürfel.«* Die Lehrperson teilt den Schüler/inne/n Boxen mit je sechzehn Tinkercubes (je acht rote und acht grüne Steckwürfel) aus. Die Schüler/innen spielen in Partnerarbeit mehrmals das Türmchenspiel. Zur Ergebnissicherung werden im Plenum ebenfalls einige Türmchen kodiert bzw. dekodiert.

3.4 Fabelwesenspiel

Das Fabelwesenspiel (Abb. 6) dient als Transferaufgabe der vorherigen Spiele. Die »Obere Hälfte«-Strategie wird in diesem Spiel bewusst nicht erneut von der Lehrperson aufgegriffen, da anhand dieses Spiels herausgefunden werden soll, ob die Schüler/innen ein Gespür für nützliche Fragen entwickelt haben. Die »Obere Hälfte«-Strategie wurde mit dem Hintergedanken eingeführt, dass es eine mögliche Variante der Halbierungsheuristik ist.

Im Fabelwesenspiel, sollen die Schüler/innen ein zufälliges Fabelwesen identifizieren. Es ist wichtig zu erwähnen, dass es bei dieser Einheit nicht darum geht, Dinge explizit zu machen, sondern vielmehr darum, Intuitionen und Kompetenzen von Kindern zu fördern. Ziel dieser Einheit ist es, zu beobachten, ob die Kinder einen Transfer leisten in ihrer Fragestrategie von den vorangegangenen Spielen zu einem Spiel mit einer neuen Merkmalsverteilung.

3.4.1 Beschreibung des Fabelwesenspiels

Das Fabelwesenspiel besteht aus vierzehn Spielkarten. Auf den Karten sind verschiedene Fabelwesen abgebildet, die sich in den Merkmalen Name, Bauchfarbe, Hörner, Flügel, Hände, Schwanz und Füße unterscheiden. Im Gegensatz zum Spiel »Wer ist es?« lassen die Fabelwesen so gut wie keine Assoziationen zu bekannten Menschen in der eigenen Umwelt zu. Ziel ist es, mit möglichst wenigen Fragen nach den verschiedenen Eigenschaften das gesuchte Fabelwesen herauszufinden.

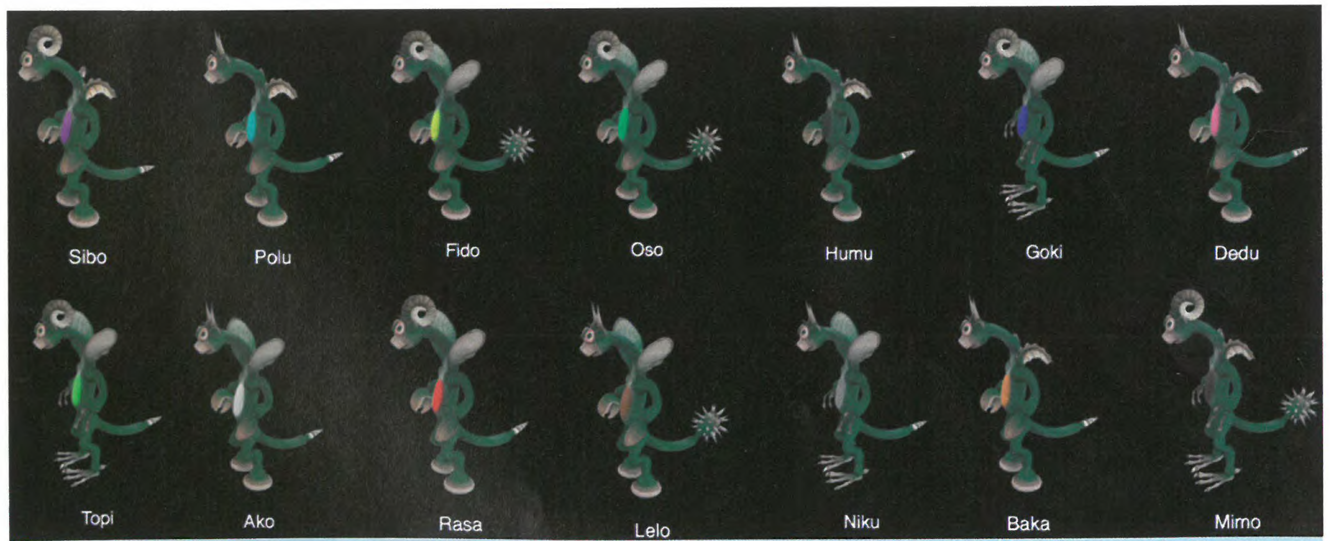

Abb. 6. Kartenset zum Fabelwesenspiel

[1] Erste Erfahrungen zum Kodieren mittels Tinkercubes in der Grundschule finden sich bspw. bei Martignon & Krauss (2007).

Ablauf: Spieler 1 zieht zufällig ein Fabelwesen aus dem Kartenstapel aus, merkt es sich, mischt den Kartenstapel und legt alle Karten vor Spieler 2 aus. Spieler 2 schaut sich die Fabelwesen genau an und stellt nun eine Ja/Nein-Frage zu einer Eigenschaft (bspw. *»Hat das Fabelwesen Elefantenfüße?«*). Spieler 1 notiert die Anzahl der Fragen, die Spieler 2 braucht, um das gesuchte Fabelwesen herauszufinden. Man könnte in dieser Spielsituation ebenfalls mit den Türmchen als Kodier- und Dekodierungsmethode arbeiten, wenn man eine Strategie festgelegt hätte. Dies war bei diesem Spiel allerdings nicht der Fall. Angenommen, wir legen fest, was die erste Frage, die zweite Frage usw. ist, dann könnte man hier analog zu dem Zahlenspiel mit den Steckwürfelchen kodieren bzw. dekodieren (Meder, Nelson, Knauber, Schray & Martignon, 2015).

3.4.2 Didaktischer Kommentar zum Fabelwesenspiel

Die Schüler/innen werden von der Lehrperson mit den verschiedenen Fabelwesen am Overheadprojektor bzw. Beamer konfrontiert: *»Hier seht ihr verschiedene Fabelwesen. Auf den ersten Blick sehen sie sehr ähnlich aus, aber es gibt einige Merkmale, in denen sich die Fabelwesen voneinander unterscheiden. Welche sind das?«* Auf diese Weise sollen die Schüler/innen im Plenum mit den Fabelwesen vertraut werden und wichtige Merkmalsinformationen herausfinden. Die herausgefundenen Eigenschaften werden von der Lehrperson an der Tafel notiert. Schwierigkeiten könnten die Schüler/innen mit dem Merkmal Name haben, da dies als einziges keine Körpereigenschaft darstellt. Wurden die verschiedenen Eigenschaften (Name, Bauchfarbe, Hörner, Flügel, Schwanz, Hände und Füße) von den Schüler/inne/n herausgefunden, teilt die Lehrperson immer für zwei Lernende jeweils ein Fabelwesen-Kartenset aus. Es ist sinnvoll, dass die jeweiligen Kartensets auf den Tischen ausgebreitet werden, damit die Schüler/innen die durch Fragen ausgeschlossenen Fabelwesen umdrehen können. Die Schüler/innen spielen das Spiel zehn Mal. Jede/r Schüler/in soll fünf Fabelwesen mit so wenig wie möglich Ja/Nein-Fragen erraten. In Partnerarbeit sollen die Schüler/innen sich anschließend Gedanken über ihre Fragestrategien machen:

»Welche Fragen waren geschickt?«
»Welche Fragen waren ungeschickt?«
»Mit welcher Fragestrategie hatte ich Erfolg?«
»Welche Fragen würde ich stellen, wenn ich das Spiel erneut spielen würde?«

Die Ergebnisse werden anschließend im Plenum verglichen und diskutiert. (Meder, Nelson, Knauber, Schray & Martignon, 2015).

4 Erste Erfahrungen und weitere Ideen

Erste Erfahrungen mit den vorgestellten Unterrichtsmaterialien wurden in verschiedenen vierten und fünften Klassen in Baden-Württemberg gesammelt. Neben der Einführung in das Thema der Informationssuche dienten die vorgestellten Spiele auch der Wiederholung von schon erworbenem Zahlenwissen. Es war schön zu sehen, wie die Lernenden versuchten, nach und nach geschickte von ungeschickten Fragen zu trennen, und sich verschiedene Fragen und Strategien für die Spiele überlegten.

Die verschiedenen Aufgaben bzw. Spiele, speziell der Umgang mit den Fabelwesen, wirkten motivierend auf die Schüler/innen. *»Was, das ist Mathe?«*, *»So macht Matheunterricht Spaß!«* oder *»Das muss ich meinen Eltern zeigen!«* waren einige Kommentare von Schüler/inne/n im Anschluss an die absolvierte Unterrichtseinheit (45 Minuten). Einige Schüler/innen nutzen sogar die anschließende Pause, um eigene Fabelwesen mit unterschiedlichen Eigenschaften zu zeichnen. Dies wäre auch als eigene Aufgabe vorstellbar und in Bezug auf den Bildungsplan: »ein selbsterfundenes Mathematikspiel präsentieren« (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport, 2004) im Plenum mit der gesamten Klasse umsetzbar.

Die verschiedenen Lernspiele können im Sinne eines Spiralcurriculums als intuitive Grundlage für die spätere Einführung und Vertiefung von informationstheoretischen Unterrichtsinhalten in der Kursstufe genutzt werden. Beispielsweise könnte man in der 7. Klasse erste informationstheoretische Elemente explizit anhand der Spiele einführen, so dass nicht nur eine Förderung von Intuitionen, sondern auch eine Wissensförderung stattfindet. In der 9.–11. Klasse, wenn Schüler/innen die Grundlagen der Wahrscheinlichkeiten bereits kennen, wäre hier ein passender Zeitpunkt die informationstheoretischen Elemente anhand von Logarithmen einzuführen und zu vertiefen. Erwünscht ist die Vermittlung von Begriffen wie Informationsgehalt und Bit: von 5 im Zahlenspiel 1 bis 8 $\log_2 8 = 3$. Wobei 3 die Anzahl von Fragen bei der Verwendung der »oberen-Hälfte«-Strategie ist. In anderen Worten 5 enthält 3 Bits Information.

Literatur

Datenbank KMK (2016). Lehrplan-Datenbank: Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK). *http://www.kmk.org/dokumentation/lehrplaene/lehrplan-datenbank.html* (6.07.2016).

Denney, D. R. & Denney N. W. (1973). The use of classification for problem solving: A comparison of middle old age. *Developmental Psychology, 62*, 275–278.

Eimas, P. D. (1970). Information processing in problem solving as a function of developmental level and stimulus saliency. *Developmental Psychology, 2*, 224–229.

Gigerenzer, G., Todd P. M. & the ABC Research Group (1999). *Simple Heuristics that Make Us Smart*. New York: Oxford University Press.

Hartley, R. V. L. (1928). Transmission of Information. *Bell Systems Technical Journal, 7*, 535–563.

Lindley, D. V. (1956). On a measure of the information provided by an experiment. *The Annals of Mathematical Statistics, 27*, 986–1005.

Martignon, L. (2015). Information Theory. In: Wright, J. D. (Hg.). *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*, 2nd edition, Vol 12. Oxford: Elsevier, 106–109.

MARTIGNON, L. & KRAUSS, S. (2007). Gezinkte und ungezinkte Würfel, Magnetplättchen und Tinkercubes: Materialien für eine Grundschulstochastik zum Anfassen. *Stochastik in der Schule, 27*, 16–26.

MARTIGNON, L., NELSON, J., MEDER, B., KNAUBER, H. & SCHRAY, H. (2015). Information search in the classroom. Vortrag anlässlich der Jahrestagung des DFG-Schwerpunkt-programms »New Frameworks of Rationality«. Etelsen (17.03.2015).

MEDER, B., NELSON, J., KNAUBER, H., SCHRAY, H. & MARTIGNON, L. (2015). Möchtegern-Monster oder echtes Monster? Psychologie und Mathematik der Informationssuche. Poster anlässlich der »Lange Nacht der Wissenschaften« am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung. Berlin (13.06.2015).

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (2004a). *Bildungsplan 2004 Grundschule.* Stuttgart.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (2004b). *Bildungsplan 2004 Gymnasium.* Stuttgart.

MOSHER, F. A. & HORNSBY, J. R. (1960). On asking question. In: J. S. BRUNER, R. R. OLIVER & P. M. GREENFIELD et al. (Hg.): *Studies in cognitive growth.* New York: Wiley.

NELSON, J. D. (2005). Finding useful questions: on Bayesian diagnosticity, probability, impact, and information gain. *Psychological Review, 112*, 979–999.

NELSON, J. D., DIVJAK, B., GUDMUNDSDOTTIR, G., MARTIGNON, L. F., MEDER, B. (2014). Children's sequential information search is sensitive to environmental probabilities. *Cognition, 130*, 74–80.

NYQUIST, H. (1924). Certain factors affecting telegraph speed. *Bell Systems Technical Journal, 3*, 412–422.

SHANNON, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal, 24*, 379–423, 623–656.

SHANNON, C. E. & WEAVER, W. (1948/1998). *The Mathematical Theory of Communication.* University of Illinois Press: Urbana & Chicago.

HEIKE KNAUBER, heikeknauber@googlemail.com, hat das Lehramtsstudium für Realschulen an der Pädagogischen Hochschule in Ludwigsburg in den Fächern Mathematik, Englisch und Sport 2014 mit dem 1. Staatsexamen abgeschlossen und anschließend ein Masterstudium in »Bildungsforschung« absolviert. Nach ihrem Referendariat möchte sie sich auf die Wissenschaft konzentrieren.

HANNES SCHRAY arbeitet an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg am Institut für Naturwissenschaft und Technik und beschäftigt sich seit 2015 mit der Informationssuche sowie der Förderung von Fehlersuchstrategien bei Schüler/inne/n.

BJÖRN MEDER ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung. Seine Forschung beschäftigt sich mit kausalem Denken, theoretischen und psychologischen Modellen der Informationssuche und Entscheidungspsychologie.

LAURA MARTIGNON ist Professorin für Mathematik und ihre Didaktik an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg mit dem Schwerpunkt Geschlechterforschung und Assoziierte Wissenschaftlerin des Max-Planck-Instituts für Bildungsforschung in Berlin. Ihre Forschungsthemen sind die Didaktik der Stochastik und die Modellierung von Entscheidungsprozessen.

JONATHAN NELSON ist Dozent an der University of Surrey, Großbrittanien, und Gast-Wissenschaftler am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin. Seine Forschung untersucht, wie Menschen Entscheidungen treffen, nach Informationen suchen und Kategorisierungen vornehmen. Dabei entwirft er u. a. Spiele, die Konzepte der Informatik und der Mathematik der Wahrscheinlichkeit erläutern und verständlich machen.

Das räumliche Viereck – eine Einführung

S.I S.II S.II MATHEMATIK

HEINZ SCHUMANN

In dieser Arbeit werden räumliche Vierecke phänomenologisch untersucht und entsprechende raumgeometrische Begriffe und Sätze mit ihren Beweisen entwickelt. Dabei ist die Analogisierung zwischen ebener und räumlicher Geometrie hilfreich. Die Einführung bietet als eine der Anwendungen raumgeometrischen Konstruierens und Visualisierens mittels Dynamischer Raumgeometrie-Systeme (SCHUMANN 2007) und als Rezeption raumgeometrischer Theorie-Elemente ein interessantes und herausforderndes Arbeitsfeld für Schüler/innen der oberen Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II. Als dynamisches Raumgeometrie-System kann z. B. das prototypische Cabri 3D (BAINVILLE & LABORDE 2004–2015) benutzt werden. Das außerunterrichtliche Thema, das sich mit der vernachlässigten synthetischen Raumgeometrie beschäftigt und die Raumvorstellung fördert, eignet sich u. a. für die Projektarbeit, für Arbeitsgemeinschaften und für individuelle Schülerarbeiten.

MNU Journal – Ausgabe 6.2017 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

1 Verräumlichung des ebenen Vierecks

Indem man ein Teildreieck eines ebenen Vierecks um die Seite, welche innere Diagonale des Vierecks ist, in den Raum dreht, entsteht ein räumliches Viereck. Das zeigt die Abbildung 1 für das Teildreieck *ACD* eines ebenen Vierecks *ABCD*. Diese Transformation ist physisch an einem entsprechenden Modell, z. B. aus Papier, für einfach geschlossene Vierecke auch mittels Auffalten längs einer der Diagonalen als Faltachse ausführbar. Man spricht deshalb auch von Verräumlichung durch Auffalten. Umgekehrt kann man ein räumliches Viereck zu einem ebenen Viereck transformieren, indem eines seiner Teildreiecke um die entsprechende Diagonale in die Ebene des anderen gedreht wird. Man erhält die Definition: Vier Punkte *A*, *B*, *C* und *D* des Raumes mit den Verbindungsstrecken *AB*, *BC*, *CD* und *DA* bilden definitionsgemäß genau dann ein räumliches Viereck, wenn sie nicht in derselben Ebene liegen; die Strecken *AC* und *BD* sind die Diagonalen des Vierecks. Das Viereck wird nach seinen Eckpunkten mit *ABCD* bezeichnet.

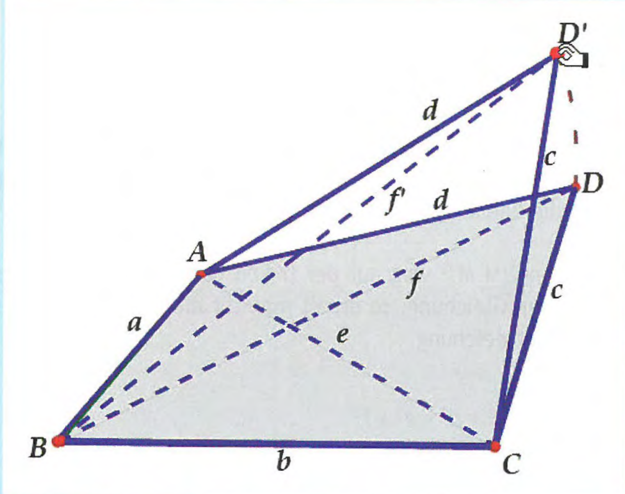

Abb. 1. Auffaltung eines ebenen Vierecks

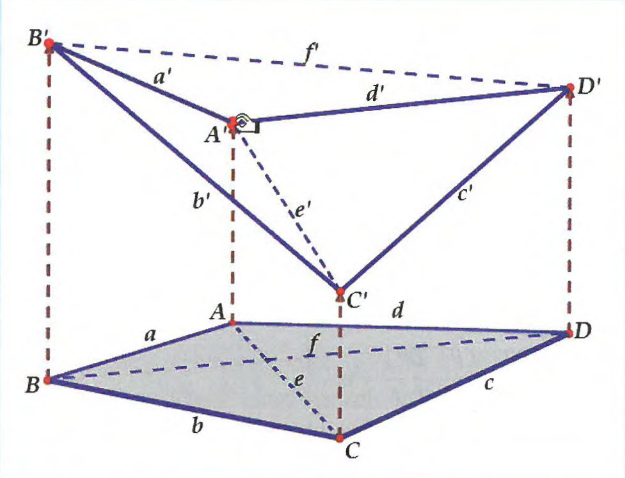

Abb. 2. Verräumlichung durch Erhebung von Eckpunkten

Anmerkungen:

1) Jedes räumliche Viereck bildet zusammen mit seinen Diagonalen ein Tetraeder (eine dreiseitige Pyramide).
2) Da zu jedem Tetraeder drei verschiedene räumliche Vierecke gehören, so übertragen sich auch alle Aussagen über räumliche Vierecke in entsprechender Weise auf Tetraeder (SCHUMANN 2011).
3) Eine weitere Möglichkeit des Verräumlichens besteht im parallelen »Herausziehen« bzw. Erheben (Elevation) der Eckpunkte eines ebenen Vierecks in den Raum (Abb. 2). Mittels Parallelprojektion auf eine Ebene kann jedes räumliche Viereck auf ein ebenes Viereck abgebildet werden.

2 Einige Aussagen über das räumliche Viereck

Einige Aussagen über das ebene Viereck gelten auch in analoger Weise für das räumliche Viereck. (Die Beweise der Aussagen (1), (2), (5) und (6) werden in der Online-Ergänzung angegeben. Dort sind auch die Abbildungen, die nicht im Artikel stehen, zu finden).

(1) Das Seitenmitten-Viereck eines räumlichen Vierecks ist ein Parallelogramm, und deshalb halbieren die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten einander im Mittelpunkt des Parallelogramms (Abb. 3).

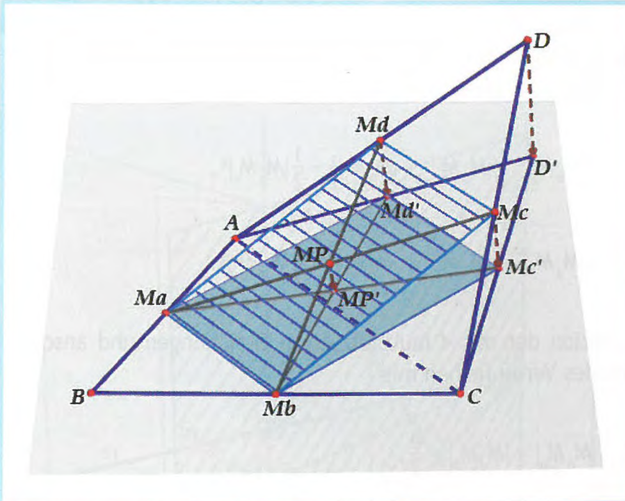

Abb. 3. Beweisfigur zu Aussage (1)

(2) Der Mittelpunkt des Seitenmitten-Parallelogramms eines räumlichen Vierecks halbiert die Verbindungsstrecke seiner Diagonalenmittelpunkte (Abb. 4).

(3) Für ein räumliches Viereck gilt: Die Summe aus den Quadraten der Längen seiner Diagonalen ist gleich der doppelten Summe aus den Quadraten der Längen seiner Mittellinien.